计量经济学期末整理

> **题型**
>
> 1. **单选**：1分 * 10
> 2. **多选**：2分 * 5
> 3. **简答**：5分 * 5
> 4. **计算**：15分 * 2 + 10分 * 1
> 5. **分析**：15分 * 1（也是一个计算题）
>
> 关注课后题

CHAPTER 1 PRELUDE（考一道选择，1～2分）

建立模型的四个步骤

1. **设计理论模型**
   - **选择变量**：确定模型包含的变量
   - **确定模型**：确定模型的数学形式
   - **预估结果**：拟定模型中待估计参数的理论期望值区间
2. **收集样本数据**
3. **估计模型参数**
4. **模型检验**
   - **经济意义检验**：参数的经济意义是否合理
   - **统计检验**：拟合优度、F、t检验
   - **计量经济学检验**：放宽条件
   - **模型预测检验**：稳定性、虚拟盘

数据质量要求

- **完整性**
- **准确性**：数据准确，是模型所需要的
- **可比性**：样本数据在不同样本点之间可比
- **一致性**：选择的数据要和我们所想要反映的经济学意义一致

模型研究成功三要素

1. 理论
2. 方法
3. 数据

CHAPTER 2 一元线性回归模型（计算全部来自一元部分）

基本概念

1. **回归分析与相关分析**
    - **回归分析**：假定变量间存在因果关系，变量不对称，区分自变量和应变量，研究的是应变量（被解释变量）随自变量（解释变量）的变化；前者是随机变量，后者不是随机变量，而是由前者决定的
    - **相关分析**：对称地对待两个变量，两个变量均被视为是随机的。研究的是两个变量间的依赖关系
2. **随机误差项**：$\mu_i = Y_i - E(Y|X_i)$，对于给定的X_i，虽然我们知道被解释变量Y的均值$E(Y|X_i)$，但对于每个个体而言，其可能会与均值间存在偏差
3. **总体回归函数与样本回归函数**
    - **总体回归函数PRF**（Population）：$E(Y|X_i) = f(X_i)$，表示被解释变量的总体均值（普查所有样本点）关于解释变量变化的函数，其图像称为总体回归线
    - **样本回归函数SRF**（Sample）：$\hat{Y}_i = f(X_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$，通过抽样拟合总体，作一条直线拟合根据抽样样本绘制的散点图，该直线称为样本回归线

一元线性回归模型参数估计

正规方程组

$$\begin{cases} \sum(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - X_i) & = \sum e_i & = 0 \\ \sum(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - X_i)X_i & = \sum e_i X_i & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

OLS估计量的离差形式

> 最大似然法ML的参数估计结果和OLS是一样的

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \\ &= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)} \\ \hat{\beta}_0 &= \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} \end{aligned} \tag{2}$$

样本回归函数的离差形式

> 这个形式在证明题里很好用，手拆$\hat{y}_i$可以解决一半的问题

$$\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i \tag{3}$$

其中，$x_i = X_i - \overline{X}$，$\hat{x}_i = \hat{X}_i - \overline{X}$，$y$同理

参数估计量的方差估计

μ_i的方差σ^2要知道整体才能计算，仅通过样本无法得知，因此用其OLS估计量替代

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum e_i^2}{n-2} \\ S_{\hat{\beta}_1}^2 &= \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2} \\ S_{\hat{\beta}_0}^2 &= \frac{\hat{\sigma}^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \end{aligned} \tag{4}$$

高斯-马尔可夫定理

在经典线性回归假设下，最小二乘估计量是具有<u>最小方差的线性无偏估计量</u>，被称为<u>最佳线性无偏估计量</u>

1. **小样本性质**
    - **线性性**：估计量$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}_1$是Y_i的线性组合

    $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (Y_i - \overline{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - C = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} \cdot Y_i - C \tag{5}$$

    - **无偏性**：$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}_1$的期望等于总体回归参数真值β_0和β_1（易证）
    - **有效性**（最小方差性）：在所有线性无偏估计量中，最小二乘估计量$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}_1$具有最小方差。即任意一个其他方法得到的无偏估计量方差均大于等于$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}_1$的方差（如果考到这个，就把上面参数估计量的方差估计默写一下，然后乱搞放缩一通糊弄过去）

    $$\forall \hat{\beta}_i^* = \sum c_i Y_i, \mathrm{Var}(\hat{\beta}_i^*) \geq \mathrm{Var}(\hat{\beta}_i) \tag{6}$$

2. **大样本性质**
    - **一致性**：样本容量趋于无穷大时，依概率收敛于总体真值
    - ~~**渐近无偏性**：样本容量趋于无穷大时，它的均值序列是否趋于总体真值~~
    - ~~**渐近有效性**：样本容量趋于无穷大时，在所有一致估计量中具有最小方差~~

一元线性回归模型的统计检验

拟合优度检验

1. **三个偏差**
    - **离差**：拟合值与平均值之差，$\hat{y}_i = \hat{Y}_i - \overline{Y}$。<u>能由回归直线解释</u>
    - **残差**：实际观测值与拟合值之差，$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$。<u>不能由回归直线解释</u>
    - **总离差**：观测值与平均值之差，$y_i = Y_i - \overline{Y} = \hat{y}_i + e_i$。如果观测值落在回归线上，则离差完全来自回归拟合值和样本均值的偏差，偏差完全由回归线解释，该点完全拟合

    > 对于残差和总离差，可能不太好理解，容易记错。有两种方法：
    >
    > - **总离差**：记住总离差是y_i，这个小写的表述形式的含义是既定的
    > - **残差**：e_i不能由回归线解释。你想，回归线是为了拟合到平均值的，和你样本点在哪没有关系。当然，它也不可能完美拟合到平均值，所以会和平均值有一点误差，这个误差就是离差，是由回归线解释的；那剩下的、拟合值到观测值的误差，就不能由回归线解释了，这就是残差

2. **三个偏差的平方和**
    - **回归平方和**ESS（Explained）：$ESS=\sum \hat{y}_i^2=\sum(\hat{Y}_i-\overline{Y}_i)^2$
    - **残差平方和**RSS（Residual）：$RSS=\sum e_i^2=\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2$
    - **总体平方和**TSS（Total）：$TSS=\sum y_i^2=\sum(Y_i-\overline{Y}_i)^2=ESS+RSS$

    > 记住离差是ESS，残差是RSS，别搞混了

3. **可决系数R^2统计量**：衡量的是实际观测点和回归线的远近，越近优度越高

$$R^2=\frac{ESS}{TSS} \tag{7}$$

变量显著性检验（t检验）

1. **零假设H_0**：$\beta_1=0$
2. **统计量**

$$\begin{aligned} t=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}}&=\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/\sum x_i^2}} \\ \sim t(n-2) \end{aligned} \tag{8}$$

3. **临界值**：根据给定的显著性水平α，查表得临界值$t_{\alpha/2}(n-2)$
4. **比较判断**：如果$|t|>t_{\alpha/2}(n-2)$，拒绝H_0

置信区间

找到一个δ，满足$P(\hat{\beta}-\delta\le\beta\le\hat{\beta}+\delta)=1-\alpha$。其中$1-\alpha$为置信系数，$\alpha$为显著性水平，置信区间的端点为置信限

求出检验量t，给定α，通过查表得到

$$P(-t_{\alpha/2}<t<t_{\alpha/2})=1-\alpha \tag{9}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\beta}-\beta}{S_{\hat{\beta}}}\in(-t_{\alpha/2},t_{\alpha/2}) \\ \beta\in(\hat{\beta}-t_{\alpha/2}\cdot S_{\hat{\beta}},\hat{\beta}+t_{\alpha/2}\cdot S_{\hat{\beta}}) \end{aligned} \tag{10}$$

一元线性回归模型的预测

总体均值预测置信区间

$$\begin{gathered} S_{\hat{Y}_0}=\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right)} \\ \hat{Y}_0-t_{\alpha/2}\cdot S_{\hat{Y}_0}<E(Y|X_0)<\hat{Y}_0+t_{\alpha/2}\cdot S_{\hat{Y}_0} \end{gathered} \tag{11}$$

总体个值预测置信区间

> $\hat{Y}_0$与Y_0不相关，所以两者相减的方差即为两者方差的加和

$$S_{\hat{Y}_0-Y_0}=\sqrt{\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(X_0-\overline{X})^2}{\sum x_i^2}\right)} \tag{12}$$
$$\hat{Y}_0-t_{\alpha/2}\cdot S_{\hat{Y}_0-Y_0}<Y_0<\hat{Y}_0+t_{\alpha/2}\cdot S_{\hat{Y}_0-Y_0}$$

CHAPTER 3 多元线性回归模型

> 预测部分记住公式。多元的经典假设必考。受约束模型必考。信息准则要考，其余打星号部分都不考

经典假设

> 五条经典假设要求能默写得出来

1. **模型正确设定**
2. **解释变量的三个要求**：样本变异性、解释变量无完全多重共线性、样本依概率收敛
    - $X_1,X_2,\ldots,X_k$具有变异性
    - X_j之间不存在严格线性相关性（无完全多重共线性）
    - X概率收敛：$P\lim_{n\to\infty}(X'X)/n=Q$（$Q$是一个可逆的有限常矩阵）
3. **随机干扰项零均值**：条件零均值$E(\mu_i|X_i)=0,i=1,2,\ldots,n$，无条件零均值$E(\mu_i)=0$

   因此，μ_i和X_i同期不相关，$\mathrm{Cov}(X_i,\mu_i)=0,i=1,2,\ldots,n$
4. **随机干扰项同方差、不序列相关**

   条件同方差$\mathrm{Var}(\mu_i|X)=\sigma^2$，条件不序列相关$\mathrm{Cov}(\mu_i,\mu_j|X)=0$

   无条件同方差$\mathrm{Var}(\mu_i)=\sigma^2$，无条件不序列相关$\mathrm{Cov}(\mu_i,\mu_j)=0$
5. **随机干扰项正态分布**：$\mu_i|X\sim N(0,\sigma^2)$（证明方差最小不需要用这一条）

多元线性回归模型的估计

表达式

$$\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1k}\\1&X_{21}&X_{22}&\cdots&X_{2k}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&X_{n1}&X_{n2}&\cdots&X_{nk}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\vdots\\\beta_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix} \tag{13}$$
$$\Downarrow$$
$$Y=X\beta+\mu$$

正规方程组

$$\begin{aligned}X'Y&=X'X\hat{\beta}\\\hat{\beta}&=(X'X)^{-1}X'Y\end{aligned} \tag{14}$$

离差形式

> 离差形式实际上就是去掉了一个β_0项

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (x'x)^{-1}x'y \\
\hat{\beta}_0 &= \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}_1 - \cdots - \hat{\beta}_k\overline{X}_k
\end{aligned}
\tag{15}
$$

方差估计

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{e'e}{n-k-1} \\
\mathrm{Var}(\hat{\beta}) &= \sigma^2(X'X)^{-1} \\
\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i) &= \sigma^2 c_{ii}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

显然，c_{ii}是$(X'X)^{-1}$主对角线上第i个元素

样本容量

- **最小样本容量**：$n \geq k+1$
- **满足模型估计的基本要求**：$n \geq 30$或$n \geq 3(k+1)$

多元线性回归模型的检验

拟合优度检验

1. **调整的可决系数$\overline{R}^2$检验**

   如果采用传统的$R^2 = \mathrm{ESS/TSS}$，会发现当增加解释变量时R^2会上升，为了避免「解释变量越多，模型拟合越好」的错觉，我们用自由度对其进行标准化：

$$
\overline{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)} \tag{17}
$$

2. **赤池信息准则（AIC）和施瓦茨准则（SC）**

   为了决定是否有必要引入新的解释变量，我们引入如下两条准则：

$$
\begin{aligned}
AIC &= \ln\frac{e'e}{n} + \frac{2(k+1)}{n} \\
SC &= \ln\frac{e'e}{n} + \frac{k}{n}\ln n
\end{aligned}
\tag{18}
$$

   准则要求只有增加的解释变量能够<u>减少</u>AIC或AC值时才在模型中增加解释变量

方程显著性检验（F检验）

1. **零假设H_0**：$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$
2. **统计量**

$$
F = \frac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)} \sim F(k, n-k-1) \tag{19}
$$

3. **临界值**：给定显著性水平α，得到临界值$F_\alpha(k, n-k-1)$（注意F是单侧检验，不是关于原点对称的）
4. **比较判断**：如果$F > F_\alpha(k, n-k-1)$，拒绝原假设

变量显著性检验（t检验）

1. **零假设**H_0：$\beta_i = 0$
2. **统计量**

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S_{\hat{\beta}_i}} = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{c_{ii}\hat{\sigma}^2}} \sim t(n-k-1) \tag{20}$$

3. **临界值**：$t_{\alpha/2}(n-k-1)$
4. **判断**：如果$|t| > t_{\alpha/2}$，拒绝原假设

置信区间

$$\beta_i \in (\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}_i}, \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}_i}) \tag{21}$$

多元线性回归模型的预测

均值

> 如果搞不清顺序可以稍加思考一下矩阵的结构。$X_0 = (1, X_1, X_2, \ldots, X_k)$

$$\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{X_0(X'X)^{-1}X_0'} < E(Y_0) < \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{X_0(X'X)^{-1}X_0'} \tag{22}$$

个别点

> 和单元一样，也是+1

$$\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{1 + X_0(X'X)^{-1}X_0'} < Y_0 < \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{1 + X_0(X'X)^{-1}X_0'} \tag{23}$$

受约束回归

> 要求能写出无约束的模型是什么、受约束的模型是什么，分别计算两个模型的残差平方和，零假设、统计量、结论

模型变换

> 对模型减少变量可以视为添加了$\beta = 0$的约束

原模型为$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \mu$，对其施加两个约束$\beta_1 + \beta_2 = 1$、$\beta_{k=1} = \beta_k$，得到：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + (1 - \beta_1) X_2 + \cdots + \beta_{k-1} X_{k-1} + \beta_{k-1} X_k + \mu^* \tag{24}$$

我们将系数相同的项合并，多出的扔到等式左边，整理得到一个新模型（解释变量少2）

$$Y^* = \beta_0 + \beta_1 X_1^* + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_{k-1} X_{k-1}^* + \mu^* \tag{25}$$

其中$Y^* = Y - X_2$，$X_1^* = X_1 - X_2$，$X_{k-1}^* = X_{k-1} + X_k$

F检验

可以证明，$RSS_R \geq RSS_U$，添加约束会使残差平方和膨胀，降低模型的解释能力，因此用两者的差异大小来检验约束条件是否为真

1. **零假设**H_0：$RSS_R = RSS_U$

> 因为受约束的模型关键是影响了有效性，所以检验的是RSS

2. **统计量**

> 记住统计量的形式是$\Delta RSS/RSS$
$$F=\frac{(RSS_R-RSS_U)/(k_U-k_R)}{RSS_U/(n-k_U-1)}\sim F(k_U-k_R,n-k_U-1) \tag{26}$$

3. **比较判断**：如果$F>F_\alpha$，拒绝原假设，约束条件不成立

虚拟变量

> 虚拟变量满足经典假设，考点在于如何建模（变量怎么设、变量如何引入模型）

虚拟变量的引入

1. **加法方式**：将虚拟变量以相加的形式引入模型，考察截距的变化

> $$Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+\beta_2D_1+\beta_3D_2+\mu_i \tag{27}$$

2. **乘法方式**：如果斜率发生变化，加法方式便无法表示，此时我们应该采用乘法方式引入虚拟变量

> 对于每个解释变量，增加一项解释变量乘入的形式（即βDX项）
> $$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\delta_1D_iX_{i1}+\beta_2X_{i2}+\delta_2D_iX_{i2}+\mu_i \tag{28}$$

3. **都引入**：同时增加加法项与乘法项

虚拟变量设置原则

虚拟变量只能有0和1。假设一个定性变量有m个类别，则在模型中引入$m-1$个虚拟变量。引入超过$m-1$个虚拟变量会带来完全共线性的问题

> 比如，引入季节的影响，则需要3个虚拟变量
> $$D_{i1}=\begin{cases}1 & \text{春季}\\0 & \text{其他}\end{cases};\quad D_{i2}=\begin{cases}1 & \text{夏季}\\0 & \text{其他}\end{cases};\quad D_{i3}=\begin{cases}1 & \text{秋季}\\0 & \text{其他}\end{cases} \tag{29}$$
> 如果我们引入4个虚拟变量，会导致当D_{i1}、D_{i2}、D_{i3}确定时，D_{i4}也确定，且可以由前三个线性表示，不满足多元线性回归模型的基本假设

CHAPTER 4 放宽条件的计量经济学模型（都是重点）

> 本章学习五步走：
>
> 1. **概念**：什么是……？
> 2. **背景**：现实中是否存在这个问题？
> 3. **后果**：如果不加改进将导致什么后果？
> 4. **检验**：如何判断是否存在这个问题？

> 5. **解决**：如何解决这个问题?

多重共线性

多重共线性的概念：解释变量间出现高度的相关性

多重共线性的两种类型：

1. **完全共线性**：解释变量间线性相关
2. **近似共线性**（交互相关）：在完全共线性的基础上加一个随机误差项，$c_1X_{i1}+c_2X_{i2}+\cdots+c_kX_{ik}+\nu_i=0$

背景：模型设定失误、经济变量存在共同趋势、样本资料限制

样本资料限制（现有条件下难以找到满足不相关条件的数据。比如将考试分数Y与家庭教育支出X_1，和家庭人均收入X_2设定模型。因为正常来说X_1和X_2间存在一定程度的相关关系，而样本收集可能又恰好导致其存在严重的多重共线性）

后果：破坏了经典假设2

> 首先，破坏经典假设2 $\Rightarrow$ 最小方差性失效 $\Rightarrow$ t检验失效（容易重要的解释变量排除在模型之外，因为容易误以为其参数为0）
>
> 此外，参数估计会无法计算或不合理，因为矩阵不满秩

1. **破坏最小方差性**：在最小方差性中，我们提到$\mathrm{Var}(\hat{\beta})=\sigma^2(X'X)^{-1}$，因为有较强的多重共线性，所以$|X'X|\approx 0$，导致参数估计的方差较大
2. **变量的显著性检验和模型的预测功能失去意义**（t值失效）：因为样本方差较大，导致$t=(\hat{\beta}_i-\beta_i)/\sqrt{c_{ii}\frac{e'e}{n-k-1}}$变小，容易误判$\beta_i=0$
3. **参数估计量经济意义不合理**：当X_1和X_2间存在线性相关性时，β已经不再反映X_1和X_2分别对Y的影响，而是它们对Y共同的影响（假设$X_1\approx X_2$，则$\beta_1+\beta_2$等于某一定值即可，此时算出的β_1和β_2很可能比较极端且随机，比如出现一个正一个负的情况，表达的不再是X_1和X_2分别对Y的影响，失去了应有的经济学意义）
4. **完全共线性下参数估计量不存在**：因为完全共线性不是满秩的，逆矩阵不存在，而我们有$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$，无法求得确定的估计值

检验

1. **存在**：检验多重共线性是否存在
   - **简单相关系数法**：二元。选2个解释变量，计算相关系数，如果r接近1，则存在较强的多重共线性
   - **综合统计检验法**：多元。如果模型的R^2和F值较大，但t值较小，说明解释变量对被解释变量整体上具有解释作用，但单个解释变量缺乏独立的解释作用。可能存在多重共线性
2. **范围**：锁定多重共线性的范围
   - **判定系数检验法**：对每一个解释变量，分别用其他的解释变量进行回归，计算拟合优度（也称判定系数）。对于判定系数较大的X_j，作F检验（F值统计量和拟合优度正相关）

     $$F_j=\frac{R_{j.}^2/(k-1)}{(1-R_{j.}^2)/(n-k)}\sim F(k-1,n-k) \tag{30}$$

     其中$R_j.$为关于X_j的回归方程的可决系数

- **逐步回归法**：即是检验的方法，又是克服的方法。逐个引入解释变量，根据拟合优度的变化判断是否需要引入新变量。如果新引入变量后拟合优度显著改善，说明这是一个独立的解释变量；否则不引入

3. VIF**方差膨胀因子**：二元为$1/(1-r^2)$，多元为$1/(1-R^2)$（r表示两变量的相关系数，R^2是可决系数）

> 考过选择，给了R^2，计算VIF
>
> 二元的时候，估计量的方差如下，通过下面这个式子可以直观地理解为什么$1/(1-r^2)$叫做"方差膨胀因子"
>
> $$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{\sum x_{i1}^2(1-r^2)} \tag{31}$$

解决：逐步回归法

逐个找出引起共线性的变量，让它滚。逐个引入解释变量，根据拟合优度的变化判断是否需要引入新变量，如果新变量引入后拟合优度显著改善，引入；否则不引入

异方差性

异方差性的概念：随机误差项方差不同

> 三个类型要记住

出现$\mathrm{Var}(\mu_i|X_{i1},X_{i2},\ldots,X_{ik})=\sigma_i^2$（即，对于不同的样本点，随机误差的方差不同），就认为出现了异方差性

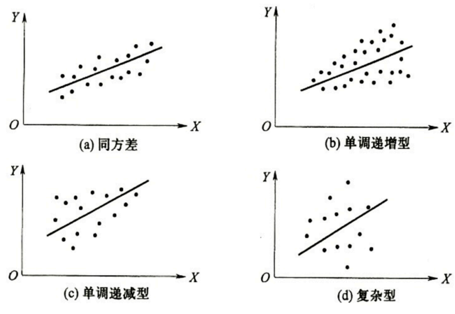
- **单调递增型**：σ_i^2会随某个解释变量X增大而增大
- **单调递减型**：σ_i^2会随某个解释变量X增大而减小
- **复杂型**：不单调

后果：违反了经典假设4，同样破坏有效性

1. **参数估计非有效**：OLS估计依然无偏，但不有效（因为有效性证明中利用了$E(\mu\mu')=\sigma^2I$）
2. **变量的显著性检验无效**：因为检验中的$t=\hat{\beta}_i/S_{\hat{\beta}_i}$，异方差会导致标准差的估计出现误差
3. **模型的预测无效**：一方面，因为失去有效性，所以模型效果不佳；另一方面，置信区间也需要用到标准差的估计量

检验

1. **图示法**：只能用于直观判断，不能量化判断
   - $X-Y$**散点图**：观察是否存在明显的散点扩大、缩小



   - $X-\tilde{e}_i^2$**散点图**：如果是一条平行于x轴的直线，则满足同方差；有明显的单调性或复杂趋势，则认为是异方差
2. **布罗施-帕甘检验（B-P检验）**：残差可以由解释变量线性解释
   - **原模型**：$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\mu_i$

- **辅助回归**：$e_i^2 = \delta_0 + \delta_1 X_{i1} + \delta_2 X_{i2} + \cdots + \delta_k X_{ik} + \varepsilon_i$
- **统计量**：拉格朗日乘数检验

$$LM = n \cdot R_{e^2}^2 \dot{\sim} \chi^2(k) \tag{32}$$

3. **White检验**：第一步OLS得到e_i，第二步用二次项对e_i^2进行回归（注意BP和White的统计量都是LM）
   - **原模型**：$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \mu_i$
   - **零假设**：$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_5 = 0$
   - **辅助回归**（别忘了$X_{i1}X_{i2}$交叉项）

$$e_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{i1} + \alpha_2 X_{i2} + \alpha_3 X_{i1}^2 + \alpha_4 X_{i2}^2 + \alpha_5 X_{i1} X_{i2} + \varepsilon_i \tag{33}$$

   辅助回归模型中还可以引入更高次项
   - **统计量**：和B-P检验相同

$$LM = n \cdot R^2 \dot{\sim} \chi^2(h) \tag{34}$$

   h为辅助回归模型中解释变量的个数（这里是5），$\dot{\sim}$表示渐近服从某分布

修正

1. **WLS加权最小二乘法**（或者也可以叫GLS）：对原模型进行加权，让随机误差项的方差一致

   如果我们发现$\text{Var}(\mu_i) = \sigma_i^2 = f(X_{ij})\sigma^2$，则令

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(X_{ij})} Y_i &= \beta_0 \frac{1}{\sqrt{f(X_{ij})}} + \beta_1 \frac{1}{\sqrt{f(X_{ij})}} X_{i1} + \cdots + \beta_k \frac{1}{\sqrt{f(X_{ij})}} X_{ik} + \frac{1}{\sqrt{f(X_{ij})}} \mu_i \\ Y_i^* &= \beta_0^* + \beta_1 X_{i1}^* + \cdots + \beta_k X_{ik}^* + \mu_i^* \end{aligned} \tag{35}$$

   但事实上，因为我们并不知道这个$f(X_{ij})$的具体形式，因此通常有2种“权”的函数形式：
   - **直接取$1/\tilde{e}_i$**（书上无）：直接取$D^{-1} = \text{diag}\{1/|\tilde{e}_1|, \ldots, 1/|\tilde{e}_n|\}$为权矩阵
   - **指数形式**（书上有）：假设方差存在指数函数形式$\mu_i^2 = \sigma^2 \exp(\alpha_0 + \alpha_1 X_{i1} + \cdots + \alpha_k X_{ik})$

     对模型$\ln(\tilde{e}_i^2) = \delta_0 + \alpha_1 X_{i1} + \cdots + \alpha_k X_{ik} + \nu_i$进行估计，得到的权为：

$$\hat{w}_i = 1/\sqrt{\exp(\hat{\delta}_0 + \hat{\alpha}_1 X_{i1} + \cdots + \hat{\alpha}_k X_{ik})} \tag{36}$$

2. **异方差稳健标准误法**：因为异方差满足无偏性和一致性（参数估计没问题），只需要修正方差即可。因此，异方差稳健标准误法用OLS的残差平方e_i^2代替σ_i^2（替换后满足大样本下一致性）

   在一元线性回归模型中，$\hat{\beta}_1$的正确方差是$(\sum x_i^2 \sigma_i^2)/(\sum x_i^2)^2$（你让这个式子满足同方差性，就会得到那个熟悉的表达式），用e_i^2替换σ_i^2

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2} \\ &\doteq \frac{\sum x_i^2 e_i^2}{(\sum x_i^2)^2} \end{aligned} \tag{37}$$

内生解释变量（重点）

概念：解释变量和误差项存在相关性

- **同期无关，异期相关**：X_{i2}与μ_i不相关，与μ_j相关

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{i2}, \mu_i) &= 0 \\ \text{Cov}(X_{i2}, \mu_{i-s}) &\neq 0 \qquad s \neq 0 \end{aligned} \tag{38}$$

- **同期相关**

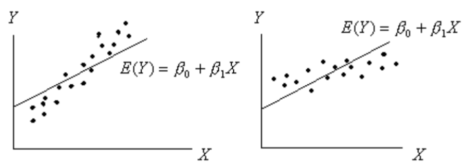
$$\text{Cov}(X_{i2}, \mu_i) \neq 0 \tag{39}$$

背景：联立因果、遗漏解释变量、测量误差

1. **解释变量与被解释变量互为因果 / 联立因果**：前者指的是单方程中X与Y相互影响，后者指联立方程模型中变量相互依存（如供给需求均衡中，供给和需求相互影响）
2. **遗漏解释变量**：遗漏的变量与模型中的一个或多个解释变量具有同期相关性（遗漏的变量会进入残差项，而其又恰好与解释变量具有相关性）
3. **解释变量存在测量误差**

后果：破坏无偏性 $\Rightarrow$ OLS估计量失效

如果随机误差项和解释变量正相关，则通过OLS拟合出的直线斜率会偏大（因为除了X在影响Y，μ也会随X的增大而增大，对Y的增加产生贡献）；反之，直线显得更加平缓



（a）正相关　　　　（b）负相关

- **正相关**：高估斜率项，低估截距项
- **负相关**：低估斜率项，高估截距项

考虑一元线性回归模型，其OLS估计量为：

$$E(\hat{\beta}_1) = E(\frac{x_i y_i}{\sum x_i^2}) = E(\beta_1 + \frac{\sum x_i \mu_i}{\sum x_i^2}) = \beta_1 + E(\sum \frac{x_i \mu_i}{\sum x_i^2}) \neq \beta_1 \tag{40}$$

不是无偏估计量。样本量足够大时：

$$P \lim_{n \to +\infty} \left(\beta_1 + \frac{\sum x_i \mu_i}{\sum x_i^2} \right) = \beta_1 + \frac{P \lim(\frac{1}{n} \sum x_i \mu_i)}{P \lim(\frac{1}{n} \sum x_i^2)} = \beta_1 + \frac{\text{Cov}(X_i, \mu_i)}{\text{Var}(X_i)} \tag{41}$$

当不同期相关时，大样本下一致；同期相关时，大样本下也不一致

修正：工具变量法、两阶段普通最小二乘法2SLS、广义矩估计方法GMM

> 工具变量法和2SLS在方法上是一样的，可以放在一起记

1. **工具变量法**：引入一个工具变量，代替模型中与随机干扰项相关的内生解释变量。工具变量满足：
    - **相关性**：工具变量与其所代替的变量高度相关
    - **外生性**（排他性约束）：与随机干扰项不相关
    - **与其他解释变量不高度相关**：避免出现严重的多重共线性

虽然$\sum_{i=1}^{n} x_i\mu_i \neq 0$，但$\mu$与$z$不相关，我们将$x$换为$z$，这样就得到了一个新的正规方程组

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} z_i\mu_i = \sum_{i=1}^{n} z_i(y_i - \beta_1 x_i) = \sum z_i y_i - \beta_1 \sum z_i x_i = 0 \\ \tilde{\beta}_1 = \frac{\sum z_i y_i}{\sum z_i x_i} \\ \tilde{\beta}_0 = \overline{Y} - \tilde{\beta}_1 \overline{X}\end{aligned} \tag{42}$$

对于矩阵表示，正规方程组为$Z'Y = Z'X\beta$（或者，换成$Z'(Y - X\beta)$和上面的形式更类似一些，我觉得不会考）

- **大样本下工具变量法为一致估计量，小样本下有偏**

> 历年卷出现过证明

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1 &= \frac{\sum z_i y_i}{\sum z_i x_i} = \frac{\sum z_i(Y_i - \overline{Y})}{\sum z_i x_i} \\ &= \frac{\sum z_i Y_i}{\sum z_i x_i} - \frac{\overline{Y}\sum z_i}{\sum z_i x_i} \\ &= \frac{\sum z_i Y_i}{\sum z_i x_i} \qquad\qquad E(z_i) = E(Z_i - \overline{Z}) = 0 \\ &= \frac{\sum z_i(\beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i)}{\sum z_i x_i} \\ &= \frac{\beta_1 \sum z_i x_i + \sum z_i \mu_i}{\sum z_i x_i} \\ &= \beta_1 + \frac{\sum z_i \mu_i}{\sum z_i x_i}\end{aligned} \tag{43}$$

因为工具变量的选取要求与X强相关，同时不引入新的内生性问题。因此大样本一致

- **估计识别：不可识别、恰好识别、过度识别**（无非就是工具变量和内生解释变量孰多孰少）

2. **2SLS**：针对过度识别的模型，先估计内生的解释变量，再进行替换

   原模型：$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \mu_i$（注意$Z_i$是本来就有的解释变量）

   第一阶段：用所有不存在内生性的变量对存在内生性的变量进行OLS回归（包括找到的工具变量和其他解释变量）

$$\hat{X}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Z_{i1} + \hat{\alpha} Z_{i2} + \hat{\alpha}_3 Z_i \tag{44}$$

   第二阶段：用第一阶段的得到的$\hat{X}_i$代替模型X_i，进行回归

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \hat{X}_i + \hat{\beta}_2 Z_i + \mu_i \tag{45}$$

3. **GMM**：同样适用于过度识别的模型（书本上好像没有？）

检验：Hausman检验、过度识别的约束检验

1. **Hausman检验**：检验是否同期相关。先对内生变量作回归，然后将残差引入原模型

   第一步：对于模型$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_{i1} + \mu_i$，我们找到一个工具变量$Z_2$，对$X_i$进行估计（和2SLS第一步相同）

$$X_i = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{i1} + \alpha_2 Z_{i2} + \nu_i \tag{46}$$

   第二步：将上一步的残差加入原模型，进行OLS估计

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_{i1} + \delta\hat{\nu}_i + \varepsilon_i \tag{47}$$

如果δ显著不为0，说明存在同期相关（因为就相当于解释变量进入了残差项）

2. **过度识别的约束检验**：对过度识别的模型，检验工具变量的外生性。第一步：2SLS，记录残差项；第二步：将残差项关于所有工具变量回归，检验参数是否为0（先拟合，再检验）
   - 记2SLS的参数估计为$\tilde{\beta}$，残差为$\tilde{\mu}_i$
   $$\tilde{\mu}_i = Y_i - (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 X_i + \tilde{\beta}_2 Z_i) \tag{48}$$
   - 将$\tilde{\mu}_i$关于所有工具变量以及外生变量辅助回归：
   $$\tilde{\mu}_i = \delta_0 + \delta_1 Z_{i1} + \delta_2 Z_{i2} + \delta_3 Z_i + \varepsilon_i \tag{49}$$
   - **统计量J**
   $$J = nR^2 \sim \chi^2(1) \tag{50}$$
   这里的1表示多余的工具变量个数（1个外生变量、2个工具变量，因此多了1个）

模型设定偏误

模型设定偏误的类型：遗漏解释变量、误选无关变量、错误的函数形式

后果

1. **遗漏相关变量**（考过选择）

   如果遗漏了相关的解释变量，不就是内生性吗。参数估计有偏、不一致，随机扰动项和参数的方差估计也有偏

   如果遗漏了不相关的，斜率项无偏一致，但截距项有偏
2. **包含无关变量**：参数估计无偏，但最小方差性受影响
3. **错误的函数形式**：没有什么东西是对的

检验：图示法、拉姆齐Ramsey的RESET检验（将拟合值的幂次项加入模型）

1. **残差图示法**：观察残差是否具有明显的规律性
2. **RESET检验**：先回归，然后将$\hat{Y}$的若干次幂引入模型==（一次项不能加，不然左右就消掉了），重新估计并检验。这个和2SLS有点像

   OLS估计得到：$\hat{Y} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_1 + \hat{\alpha}_2 X_2$

   将$\hat{Y}$的若干次幂引入模型进行估计：$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \gamma_1 \hat{Y}^2 + \gamma_2 \hat{Y}^3 + \mu$

CHAPTER 5 时间序列模型

序列相关性

概念：$\mathrm{Cov}(\mu_i, \mu_j) = E(\mu_i \mu_j) \neq 0$

因为$\mathrm{Cov}(\mu_i, \mu_j) = E(\mu_i \mu_j) \neq 0$，所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mu) = E(\mu\mu') &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \dots & E(\mu_1\mu_T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mu_T\mu_1) & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \dots & \sigma_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{T1} & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2\Omega \neq \sigma^2 I
\end{aligned} \tag{51}
$$

如果只有$E(\mu_t\mu_{t-1}) \neq 0$，则为一阶序列相关（同理可得p阶序列相关）。对于一阶序列相关（也叫自相关），我们有：

$$
\mu_t = \rho\mu_{t-1} + \varepsilon_t \tag{52}
$$

- **自协方差系数**ρ（一阶自相关系数）：一般来说$\rho \in (-1, 1)$
- **白噪声**ε：满足零均值、同方差、不序列相关

背景：固有惯性、模型偏误、数据编造

1. **经济变量固有惯性**：构建一个居民消费关于收入的模型，消费习惯是具有惯性的，当收入发生较大变化时，消费很可能不会同等变化。也就是说，消费习惯的影响包含在随机误差项中，很可能会出现序列相关性
2. **模型设定偏误**：如果模型丢掉了重要的解释变量或函数形式存在偏误，会导致部分解释变量体现在残差项中
3. **数据编造**：一些数据是通过已知的数据生成的。比如如果月度数据来自季度数据的平均，这样就会削弱月度数据的波动性，干扰项出现序列相关；两个时间节点间的"内插"技术也常会带来序列相关

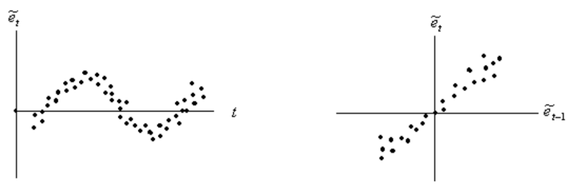
后果：破坏最小方差性 $\Rightarrow$ 显著性检验失效 $\Rightarrow$ 模型预测也失效（但无偏性都在）

> 除了内生性和偏误，多重共线性、异方差性和序列相关都是破坏最小方差性

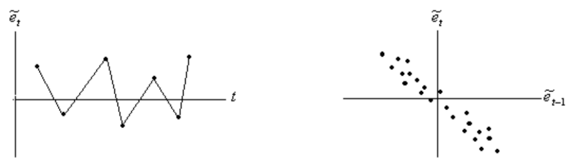
序列相关性的检验：图示法、回归检验法、D-W检验法、LM检验

> 重点是拉格朗日乘数检验

1. **图示法**：注意横坐标是t还是$\tilde{e}_{t-1}$
    - **正序列相关**



    - **负序列相关**



2. **回归检验法**：以$\tilde{e}_t$为被解释变量，选择各种可能的相关量（如$\tilde{e}_{t-1}$、$\tilde{e}_{t-2}$、$\tilde{e}_t^2$等）为解释变量，建立各种可能的回归方程，进行F检验

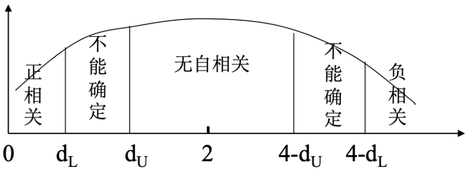
$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_t &= \rho\tilde{e}_{t-1} + \varepsilon_t \\
\tilde{e}_t &= \rho_1\tilde{e}_{t-1} + \rho_2\tilde{e}_{t-2} + \varepsilon_t \\
&\dots
\end{aligned} \tag{53}
$$

如果存在某种函数形式，方程可以显著成立（如果上面的某个方程显著成立），说明原模型存在序列相关性

3. **杜宾-瓦森$D.W.$检验法**：假定一阶自相关，模型中不存在滞后的解释变量（无Y_{t-i}）
   - **原方程**：$Y_t=\beta_0+\beta_1X_{t1}+\beta_2X_{t2}+\cdots+\beta_kX_{tk}+\mu_t$
   - **零假设H_0**：$\mu_t=\rho\mu_{t-1}+\varepsilon_t$中$\rho=0$，不存在一阶自回归
   - **$D.W.$统计量**（$\approx 2(1-\rho)$这个还是要知道的，可能会考）

$$D.W.=\frac{\sum_{t=2}^{n}(\tilde{e}_t-\tilde{e}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\tilde{e}_t^2}\approx 2(1-\rho) \tag{54}$$

   - **检验**：关于2对称



4. **BGLM拉格朗日乘数检验**：克服了$D.W.$的缺陷，允许高阶序列相关、存在滞后解释变量

   怀疑存在p阶序列相关：$\mu_t=\rho_1\mu_{t-1}+\rho_2\mu_{t-2}+\cdots+\rho_p\mu_{t-p}+\varepsilon_t$
   - **原方程**：$Y_t=\beta_0+\beta_1X_{t1}+\beta_2X_{t2}+\cdots+\beta_kX_{tk}+\mu_t$
   - **辅助方程**：把μ_t换掉。$Y_t=\beta_0+\beta_1X_{t1}+\cdots+\beta_kX_{tk}+\rho_1\mu_{t-1}+\cdots+\rho_p\mu_{t-p}+\varepsilon_t$
   - **零假设**：$\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_p=0$
   - **统计量**（都是拉格朗日了那肯定就是LM统计量了）

$$LM=nR^2\sim\chi^2(p) \tag{55}$$

   - **检验**：给定α，查临界值$\chi^2_\alpha(p)$，与LM值比较，如果LM超过临界值，拒绝原假设

   在实际检验中，可以从1阶开始，逐次向更高阶检验

序列相关性的修正：广义最小二乘法、广义差分法

1. **GLS广义最小二乘法**：对于$\mathrm{Var}(\mu)=E(\mu\mu')=\sigma^2\Omega$，$\Omega$是一个对称的正定矩阵，因此存在一个可逆矩阵$D$，使得$\Omega=DD'$，估计量为：

$$\hat{\beta}_{GLS}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y \tag{56}$$

   这个结论从数学上说明了：对于不满足球形假设的模型，也可以获得无偏有效的估计量，且表达式唯一、与D无关

2. **广义差分法**（题目会给ρ，不用自己估计，直接差分）
   - **原模型**：$Y_t=\beta_0+\beta_1X_t+\mu_t$，记为$(1)$式

     假设存在一阶自相关$\mu_t=\rho\mu_{t-1}+\varepsilon_t$。我们希望可以消去随机误差项（不管是几阶的，关键是把μ消掉）
   - **消μ**：将原模型滞后一期，$Y_{t-1}=\beta_0+\beta_1X_{t-1}+\mu_{t-1}$，记为$(2)$式。$(1)-\rho\times(2)$得：

$$Y_t-\rho Y_{t-1}=\beta_0(1-\rho)+\beta_1(X_t-\rho X_{t-1})+(\mu_t-\rho\mu_{t-1}) \tag{57}$$

     令$Y_t-\rho Y_{t-1}=\Delta Y_t$、$\beta_0(1-\rho)=\beta_0'$、$X_t-\rho X_{t-1}=\Delta X_t$，得：

$$\Delta Y_t=\beta_0'+\beta_1\Delta X_t+\varepsilon_t \tag{58}$$

   - 对上式进行OLS估计，就可以得到无偏有效的估计量。在差分过程中，损失了第一个观测值，因此需要作**普莱斯-温斯特变换**：

$$Y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}Y_1, X_{1j}^* = \sqrt{1-\rho^2}X_{1j} \tag{59}$$

> 这里给出广义差分法的代码，在历年卷中出现过考察
>
> ```
> equation eq02.ls y c x ar(1)  // eq02是方程名，.ls指定OLS法，ar(1)是滞后项
> ```

3. **随机误差项相关系数的估计：科克伦-奥科特迭代法**（原模型与广义差分模型横跳）

   因为GLS和广义差分法都要用到ρ，所以我们需要对其进行估计

   OLS估计原模型$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$，取残差项，作为$\mu$的近似估计值，以其作为观测值，对下面模型进行OLS：

$$\mu_i = \rho_1\mu_{i-1} + \rho_2\mu_{i-2} + \cdots + \rho_l\mu_{i-l} + \varepsilon_i \tag{60}$$

   得到$\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_l$，这是$\rho$的第一次估计。将$\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_l$代入广义差分模型进行OLS估计：

$$Y_t - \hat{\rho}_1 Y_{t-1} - \cdots - \hat{\rho}_l Y_{t-l} = \beta_0(1-\hat{\rho}_1 - \cdots - \hat{\rho}_l) + \beta_1(X_i - \hat{\rho}_1 X_{i-1} - \cdots - \hat{\rho}_l X_{i-l}) + \varepsilon_t \tag{61}$$

   得到β的估计量$\hat{\hat{\beta}}_0, \hat{\hat{\beta}}_1$，将其带入原模型，得到$\rho$的第二次估计值$\hat{\hat{\rho}}_1, \hat{\hat{\rho}}_2, \ldots, \hat{\hat{\rho}}_l$。一直迭代到相邻两次的$\rho$小于某个精度为止

4. **序列相关稳健标准误法**（猜测不考）：用真实β的标准误进行估计

时间序列的平稳性及其检验（重点）

时间序列平稳性

1. **定义**：如果我们称一个由某一**随机过程**生成的随机时间序列（即，时间序列$\{X_t\}(t=1,2,\ldots)$的每一个数值都是从一个概率分布中随机得到的）是平稳的，则其满足如下性质

   - **均值与时间无关**：$E(X_t) = \mu$是与时间t无关的常数
   - **方差与时间无关**：$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2$是与时间$t$无关的常数
   - **协方差与时间无关**：$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$是只与时间间隔$k$有关、与时间$t$无关的常数（记住$\gamma$的含义）

   同时，我们称该随机过程为**平稳随机过程**

2. **白噪声、随机游走、$AR(p)$**

   - **白噪声**：$X_t = \mu_t, \mu_t \sim N(0, \sigma^2)$，白噪声是最简单的随机序列。零均值同方差序列不相关，显然是平稳的
   - **随机游走**：$X_t = X_{t-1} + \mu_t$，其中μ_t是白噪声。验证其是否为平稳的随机时间序列：

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(X_{t-1} + \mu_t) = E(X_{t-1}) + E(\mu_t) \\ &= E(X_{t-1}) \\ X_t &= X_0 + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_t \\ \Rightarrow \mathrm{Var}(X_t) &= t \end{aligned} \tag{62}$$

     方差与t有关，不平稳。但是如果对其作一阶差分$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu_t$，就是平稳的了

     一般来说，对一个非平稳的随机序列作多次差分（一般两次就够），可以获得平稳的随机序列

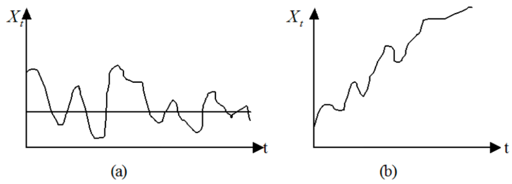
   - **一阶自回归$AR(1)$过程**：$X_t = \Phi X_{t-1} + \mu_t$，随机游走的一般形式（随机游走是$AR(1)$的特殊形式）

     可以证明，当$|\Phi| \geq 1$时，该随机过程生成的时间序列是发散的，不平稳。$-1 < \Phi < 1$时平稳

   - **p阶自回归$AR(p)$过程**：$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \cdots + \Phi_o X_{t-p} + \mu_t$

平稳性的检验

1. **图示法**：一个平稳的时间序列往往围绕某值上下波动，不平稳的呈现持续上升或下降趋势



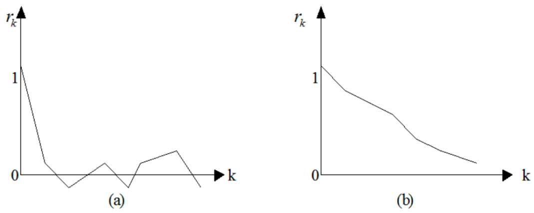
2. **ACF自相关函数**：**ACF函数**如下（上面提到过，$\gamma_k = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k})$，$\gamma_0$是$X_t$的方差）

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 \tag{63}$$

自相关函数是关于k递减的函数（间隔越长，越不相关）。因为一个随机过程只有一个实现（样本），因此，只能计算**样本自相关函数**（是ACF的展开）：

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \overline{X})(X_{t+k} - \overline{X})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2} \tag{64}$$

分母不变，随着k的增加，分子的项数变少，因此样本自相关函数应呈下降趋势。且平稳序列的下降速度要快得多



3. **Bartlett定理**：如果时间序列是由白噪声生成的，对所有的$k > 0$，样本自相关系数都近似服从$N(0, 1/n)$（n为样本数）
4. **Q统计量**：对$\rho_0 = \rho_1 = \cdots = \rho_k = 0$进行检验（统计量别背了）

   进行==χ^2检验，如果统计量大于显著性水平为α的临界值，拒绝原假设

平稳性的单位根检验（重点）

1. **DF检验**

   检验一个时间序列的平稳性，可以检验其一阶自回归模型$\Delta X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \mu_t$是否$\rho < 1$来实现。或者也可以检验其差分形式$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$是否$\delta < 0$来实现

   - **模型**：$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$
   - **零假设**：$\delta = 0$，**备择假设**：$\delta < 0$
   - **检验方式**：DF分布、τ统计量（因为大样本下t检验是有偏的，故采用DF分布（此时的t统计量称为τ统计量）

- **ADF检验**：DF检验的拓展

  DF检验$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$的模型假定了具有白噪声的随机误差项是由$AR(1)$生成的。但在实际的检验中，完全有可能来自更高阶。这样的情况下，用OLS法进行估计可能会导致随机误差项出现自相关

  - **假设**：$H_0 : \delta = 0$；$H_1 : \delta < 0$
    - **辅助模型**：

$$\begin{aligned}
\Delta X_t &= \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t && \text{相比下式少了截距项} \\
\Delta X_t &= \alpha + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t && \\
\Delta X_t &= \alpha + \beta t + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t && \text{相比上式多了趋势项}
\end{aligned} \tag{65}$$

- **检验**：采用τ统计量，按照3、2、1的顺序进行$H_0: \delta = 0$的检验。 只要其中有一个模型的检验结果拒绝了零假设（即原序列不存在单位根），就停止检验，认为序列是平稳的（注意，t统计量是双侧检验的，应该是绝对值更大就拒绝。而且事实上τ的临界值都是负的，所以更小就拒绝）

  在检验前，先要确定滞后阶数m的大小：从小到大增加m，直到ε_t变为白噪声（也就是说随机项不存在序列相关性）时停止，确定为m的大小

单整序列：一个序列经过d次差分后变为平稳，则称原序列为d阶单整序列，记为$I(d)$

如果一个序列无论多少次差分后还是不平稳，则不单整。此外，$I(0)$表示平稳的序列

协整检验与误差修正模型

长期均衡关系与协整

经典回归模型是建立在平稳数据变量基础上的，对于非平稳变量，不能使用经典回归模型。但是，如果变量间存在**长期的稳定关系**，即它们之间是**协整**的，就可以使用经典回归模型方法来建立回归模型的

- **长期均衡**：如果变量在某时期受到干扰后偏离其长期均衡点，则均衡机制将会在下一期进行调整以使其重新回到均衡状态

  假设X与Y的均衡关系可以描述为$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \mu_t$（这东西就是长期均衡模型），则给定一个$X$值，$Y$对应的均衡值确定为$\alpha_0 + \alpha_1 X$。在$t-1$期末，无非就是三种情况（这个没什么好记的吧）：

$$\begin{aligned}
Y_{t-1} &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} \\
Y_{t-1} &< \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} \\
Y_{t-1} &> \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}
\end{aligned} \tag{66}$$

  在t时期，假设有一个X的变化量ΔX_t，定义Y的变化量为$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + \nu_t$，其中$\nu_t = \mu_t - \mu_{t-1}$，这就是所谓的**均衡机制**。如果本期$Y$偏离了均衡值，下一期其向着均衡值变化的趋势就更大一些

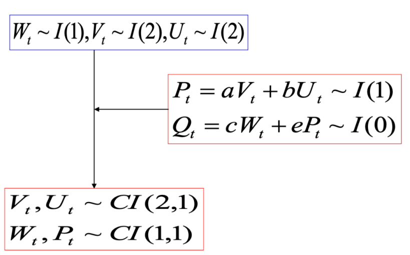
- **非均衡误差**μ_t：X与Y存在均衡关系的重要假设就是μ_t必须是平稳序列，如果μ_t自有趋势，其偏差将会累积到Y上

  $\mu_t = Y_t - \alpha_0 - \alpha_1 X_t$，称为非均衡误差，如果$X$与$Y$长期均衡关系正确，则$\mu$是一个零均值的$I(0)$序列

- **协整**：非平稳的时间序列，它们的线性组合也可能是平稳的，这样的两个时间序列就是协整的

  - (d, b)**阶协整**$CI(d, b)$：假设$X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt}$都是$d$阶单整序列，有向量$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$，让$Z_t = \alpha X' \sim I(d-b)$，认为序列$X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt}$是$(d, b)$阶协整（线性组合单整），记作$X_t \sim CI(d, b)$

    这里给出一个变换过程：



- (d,d)**阶协整**$CI(d,d)$：两个变量有各自的长期波动规律，但如果它们是(d,d)阶协整的，则其存在一个长期的稳定关系

> 一些概念辨析
>
> - 协整方程不等价均衡方程
> - **不能由协整关系导出均衡关系，只能由协整关系检验均衡关系**

协整的检验：EG检验

1. **两变量的EG检验**
   - **协整回归（静态回归）**：先对长期均衡模型进行回归，估计$Y_t=\alpha_0+\alpha_1X_t+\mu_t$，计算$e_t=Y_t-\hat{Y}_t$
   - **检验e_i平稳性**：采用ADF的模型1检验e_t的单整性

   $$\Delta e_t=\delta e_{t-1}+\sum_{i=1}^{p}\theta_i\Delta e_{t-i}+\varepsilon_t \tag{67}$$

   如果是$I(0)$，则认为X_t、Y_t是$(1,1)$阶协整，否则认为不具有协整关系。注意这里的临界值是要比ADF和DF更小的
2. ~~**多变量EG检验**（检验方法不要求）：协整变量间可能存在多种稳定的线性组合，比如如果4个变量间存在2个长期稳定关系，则这两个协整关系的线性组合也是协整的~~
3. ~~**高阶单整变量的EG检验**（方法也不要求）：针对~~$I(n),n>2$~~进行检验~~

误差修正模型ECM

一般差分模型存在问题，对非稳定的时间序列，通过差分法建立经典回归模型

$$\begin{aligned}Y_t&=\alpha_0+\alpha_1X_t+\mu_t\\ \Delta Y_t&=\alpha_1\Delta X_t+\nu_t\end{aligned} \tag{68}$$

- 模型只表达了X与Y的短期关系，忽略了长期关系
- 误差项μ_t不存在序列相关，但$\nu_t=\mu_t-\mu_{t-1}$是序列相关的

1. **误差修正模型ECM**：假设X与Y的长期均衡关系为$Y_t=\alpha_0+\alpha_1X_t+\mu_t$。采用$(1,1)$阶分布滞后形式表示短期均衡关系（$X$、$Y$均滞后1阶）

   $$Y_t=\beta_0+\beta_1X_t+\beta_2X_{t-1}+\delta Y_{t-1}+\mu_t \tag{69}$$

   因为变量是非平稳的，所以采用ECM的差分形式（ΔY_t关于ΔX_t的变化形式，下面这个式子是通过在等式两边同时减去Y_{t-1}和β_1X_{t-1}得到的）

   $$\Delta Y_t=\beta_1\Delta X_t-\lambda(Y_{t-1}-\alpha_0-\alpha_1X_{t-1})+\mu_t \tag{70}$$

   这个式子说明了，Y的变化取决于X**的变化**以及**上一期的非均衡程度**。写作：

   $$\Delta Y_t=\beta_1\Delta X_t-\lambda ecm_{t-1}+\mu_t \tag{71}$$

   ecm就是**误差修正项**，或**长期均衡偏差项**；λ是**短期调整参数**
2. **长期均衡模型与短期非均衡模型**

   $Y_t=\alpha_0+\alpha_1X_t+\mu_t$中的$\alpha_1$是**长期弹性**、$Y_t=\beta_0+\beta_1X_t+\beta_2X_{t-1}+\delta Y_{t-1}+\mu_t$中的$\beta_1$是**短期弹性**
3. **Granger表述定理**：如果X与Y是协整的，则它们的短期非均衡关系总能由下面的ECM表示（滞后的$(\Delta Y,\Delta X)$和ecm）：

$$\Delta Y_t = lagged(\Delta Y, \Delta X) - \lambda ecm_{t-1} + \mu_t \tag{72}$$

4. **误差修正模型的建立方法：EG两步法**
   - **EG两步法**

     先进行协整回归（OLS法，EG协整检验的第一步），检验变量间的协整关系，估计协整向量；

     如果存在协整性，用第一步得到的残差作为非均衡误差项代入ECM中，OLS估计
   - **直接估计法**：把ECM的括号打开，OLS估计

Granger因果关系检验

格兰杰因果关系的检验思路非常简单：如果X是Y的原因，则前几期的X就应该会对当期的Y产生影响；反之亦然。显然，这是一个必要条件，不是充分条件

1. **格兰杰因果关系检验的表述**

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \mu_t \\ X_t &= \delta_0 + \sum_{i=1}^{p} \delta_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_{t-i} + \nu_t \end{aligned} \tag{73}$$

   - **X对Y有单向影响**：α整体不为0，δ整体为0
   - **Y对X有单向影响**：δ整体不为0，λ整体为0
   - **X和Y存在双向影响**：α和δ整体不为0
   - **X与Y不存在影响**：α和δ整体为0
2. **受约束的F检验**：以$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \mu_i$为例
   - **零假设**：$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$（你想，这不就是对原模型施加约束吗，自然是采用受约束的F检验）
   - **统计量**

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/m}{RSS_U/(n-k)} \sim F(m, n-k) \tag{74}$$

     $m = p$，如果$F > F_\alpha(m, n-k)$，拒绝零假设，X是Y的格兰杰原因（注意这里的k是包含常数项在内的，所以没有+1了）
3. **格兰杰因果关系检验的一些实际问题**
   - **滞后期敏感**：选择不同的滞后期会带来不同的检验结果
   - **平稳性要求**：要求X和Y都是平稳序列
   - **样本容量问题**：样本量对检验结果影响很大，大样本下结论不稳定